SOTTOSPAZI ORTOGONALI

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con $\langle , \rangle$

Prop Sia U un s. sp. vett di V. Allora esiste una base ortonormale di U che è sottoinsieme di una base ortonormale di V.

Dim

1. U $\quad v_1, v_2$ base di U

(2) la completo a base di V

$v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$

(3) Applico G-S alla base $v_1, \ldots, v_n$

$\rightarrow$ PRODUCO BASE ORTONORMALE

$\underbrace{u_1 \ldots u_r}_{\text{base di } U} u_{r+1} \ldots u_n$

<u>Teorema</u> Sia U un s.sp di V.

Allora

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

<u>Dim</u> Per prima cosa mostriamo

che $U \cap U^{\perp} = \{0\}$

se $v \in U \cap U^{\perp}$

Calcolo

$$\langle \underset{U}{\underset{\cap}{v}}, \underset{U^{\perp}}{\underset{\cap}{v}} \rangle = 0$$

ma per la PROPRIETÀ 3

del $\langle\ ,\ \rangle$ l'unico vettore v tc $\langle v, v\rangle = 0$ è 0.

Ora mostriamo che ogni el $v \in V$ si scrive come

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{con}$$

$$v_1 \in U$$

$$v_2 \in U^\perp$$

Si crea, come nella prop. precedente

una base ORTONORMALE

di V $\quad v_1, v_2, v_r, v_{r+1}, v_n$

tc v_1, v_r è base di U,

$$v = \underbrace{(\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \quad + \alpha_r \underline{v_r})}_{\in U} +$$

$$+ \underbrace{(\beta_{r+1} v_{r+1} \quad + \beta_n v_n)}_{\in U^\perp}$$

$\square$

Sulle dispense trovate Oss 8.14

e Par 3.

Oss 8.14

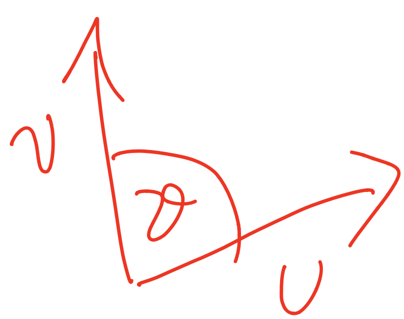
In $\mathbb{R}^n$

$\langle\ ,\ \rangle$ prod scalare standard

$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\|u\|\,\|v\| \cos\vartheta = |\langle u, v\rangle|$$

$$\cos\vartheta = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$



Teorema 8.15 DISUG. DI CAUCHY-SCHWARZ

$\forall\, u, v \in V$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Applicata a $\mathbb{R}^n$ con prod. sc. st.

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ \\ a_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ \\ \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle$$

$$\left| a_1 b_1 + \quad + a_n b_n \right| \leq \sqrt{a_1^2 + \quad + a_n^2} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{b_1^2 + \quad + b_n^2}$$